6.

FRAÇÕES ORDINÁRIAS

1).– A ideia de alíquota

Quando dividimos uma grandeza em um número inteiro de partes iguais, cada uma destas partes é dita ser uma *alíquota* da grandeza dada.

Exemplos:
– se grandeza = diagonal de um certo quadrado; dividindo-a em três partes iguais, cada uma delas é uma alíquota da diagonal;
– se grandeza=dúzia de ovos; dividindo-a em quatro partes iguais, cada uma delas é uma alíquota da dúzia.

2).– A ideia de fração

Dada uma grandeza vista como um todo, se a dividirmos em duas ou mais alíquotas, por *fração* dessa grandeza (ou desse todo) entendemos a indicação da escolha de um número inteiro dessas alíquotas.

Exemplos: (e a terminologia um meio, um terço, um quarto, etc.)
– se grandeza = diagonal de um quadrado; se dividirmos esta diagonal em três partes iguais, dizemos que tomamos como alíquota a terça parte da diagonal, e obtemos as seguintes frações:
1 terço da diagonal = 1 alíquota, 2 terços da diagonal = 2 alíquotas, 3 terços da diagonal = 3 alíquotas; 4 terços da diagonal = 4 alíquotas, etc.

– se grandeza = uma dúzia de ovos; separando esta dúzia em quatro conjuntos de mesmo número de ovos, dizemos que tomamos como alíquota a quarta parte da dúzia, e obtemos as seguintes frações:
1 quarto de dúzia = 1 alíquota, 2 quartos de dúzia = 2 alíquotas, 3 quartos de dúzia = 3 alíquotas, etc.
Quantos ovos temos em cada uma dessas frações?

Notação:
Para trabalhar com frações, é conveniente usarmos uma notação abreviada que é assim exemplificada: 2 terços da diagonal = $\frac{2}{3}$ da diagonal, 3 quartos de dúzia = $\frac{3}{4}$ de dúzia; também se usa a notação 2/3 da diagonal, 3/4 de dúzia.

Observação:
A grandeza a ser fracionada pode ser positiva, nula ou negativa. Por exemplo, quando tratamos de dinheiro, dívidas são representadas por números negativos; assim, dizendo que "fiquei com um terço da dívida da empresa", e supondo que essa dívida seja de R$ 800, teremos que tal dívida corresponde à fração (-800)/3, o que também podemos escrever como - 800/3, ou $\frac{-800}{3}$, ou $-\frac{800}{3}$.

3).– Frações de grandezas contínuas e de grandezas discretas

Como já ocorreu nos exemplos acima, a grandeza (ou o todo) a ser fracionada pode ser uma

- *grandeza contínua* (como um comprimento, uma área, uma massa, etc.), ou uma
- *grandeza discreta* (como um conjunto de ovos, o conjunto dos alunos de uma turma, etc.).

– *Exemplos de frações de grandezas contínuas*: dois quartos da área daquele retângulo, um quinto de tanque de gasolina, etc.
– *Exemplos de frações de grandezas discretas*: "Aqui, 2/7 dos alunos são homens e 5/7 são mulheres", "Quero um terço de dúzia de ovos", "Quase dois terços dos deputados estavam presentes", etc.

4).– O tipo mais importante de frações discretas: as frações ordinárias

As frações discretas de carácter inteiramente numérico (ou seja, sem nenhuma referência a grandezas concretas, como quantidade ovos ou de deputados) em que o todo a ser particionado em alíquotas é um número inteiro são denominadas **frações ordinárias**.

– Exemplos: 2/3, -4/5, 0/3, 23/17, -32/5.
– Contraexemplos: $\pi/3$ é uma fração de π, mas não é uma fração ordinária (não é sequer uma fração discreta, é uma fração contínua); o mesmo ocorre com $\sqrt{2}/5$.

> As frações ordinárias são as que têm o formato $\frac{m}{n}$ ou m/n ,
> onde m é um número inteiro qualquer e n é um inteiro positivo.

> No que segue, por brevidade, quando usarmos a expresão “fração” estaremos nos referindo a uma “fração ordinária”, o único tipo de fração que aqui trataremos.

Se iremos tratar apenas de frações ordinárias, por que todas as colocações anteriores? Não bastaria dar a definição anterior? Porque é importante termos em vista que, por exemplo, $\pi/3$ é fração, embora não do tipo ordinário.

5).– Um tipo de frações ordinárias: as frações irredutíveis

Frações irredutíveis são as frações ordinárias cujo numerador e denominador são inteiros relativamente primos.

Exemplos: 4/5, 7/3.
Contraexemplos: 4/6 (2 é fator comum), 15/9 (3 é fator comum).

6).– Igualdade (ou congruência) entre frações ordinárias: frações equivalentes

Um uso importante das frações é servir para indicar a *medida* de partes das grandezas: medir quantidade, tamanho, etc. Sob este ponto de vista, todo aluno sabe que se partirmos uma barra de chocolate em 3 alíquotas e lhe dermos 2 delas, ele estaria recebendo a mesma quantidade se lhe déssemos 4 pedaços da mesma barra quando dividida em 6 alíquotas. Por isso, sob o ponto de vista de medidas (no exemplo, quantidade de chocolate) dizemos que as frações 2/3 e 4/6 são iguais. Note bem: o processo de divisão 2/3 é diferente do 4/6, mas sob o ponto de vista de quantidade, esses processos podem ser considerados como iguais. Em termos matematicamente rigorosos, dizemos que as frações 2/3 e 4/6 são equivalentes e usaremos o sinal de = para denotar isso: 2/3 = 4/6.

Observe que podemos escrever 2/3 = 4/6 como 2/3 = (2 x 2)/(3 x 2). A partir desse exemplo, fica natural a seguinte

definição
consideramos uma fração a/b como ***equivalente*** *a uma fração c/d (o que escrevemos a/b = c/d) quando, e só quando, for possível achar um número inteiro k tal que*
ou (c = ka, d = kb), ou (a = kc, b = kd).

Na prática, é muito mais fácil usar a seguinte regra:

> **Teorema**
> *Uma fração ordinária a/b é equivalente a uma fração ordinária c/d quando, e só quando, valer ad=bc.*

Prova:
se $c = ka$ e $d = kb$, então $bc = bka = kab$, e $ad = akb = kab$, de modo que $ad = bc$.
Para a recíproca, precisamos saber interpretar frações como números que expressam a divisão entre inteiros. Mais precisamente, precisamos interpretar as frações como representação dos números racionais, assunto da próxima aula. Em todo o caso, damos uma demonstração pouco rigorosa, aqui mesmo: de $ad = bc$ segue $ad/bd = bc/bd$, e simplificando: $a/b = c/d$.

Observações –
– por *simplificar* uma fração entende-se achar uma fração a ela equivalente e que tenha numerador e denominador menores;
– uma fração irredutível não pode ser simplificada;
– toda fração é equivalente a uma fração irredutível (aplique o Teorema Fundamental da Aritm.)

7).– Somando e multiplicando frações ordinárias

Tendo como base a ideia de frações equivalentes, fica natural definirmos as operações aritméticas entre as frações ordinárias, conforme se resume no quadro abaixo:

> Sendo a/b e c/d duas frações ordinárias, sua soma e produto são definidos como
>
> $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

A justificativa, caso da soma: $2/3 = 8/12$ (pense em mesmas quantidades de bolo) e $3/4 = 9/12$, de modo que somando: $2/3 + 3/4 = 8/12 + 9/12 = 17/12$, e isto é o mesmo que $\frac{2\cdot 4+3\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{17}{12}$.
Para a multiplicação:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{1}{3}\cdot\left(2\cdot\frac{5}{7}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}.$$

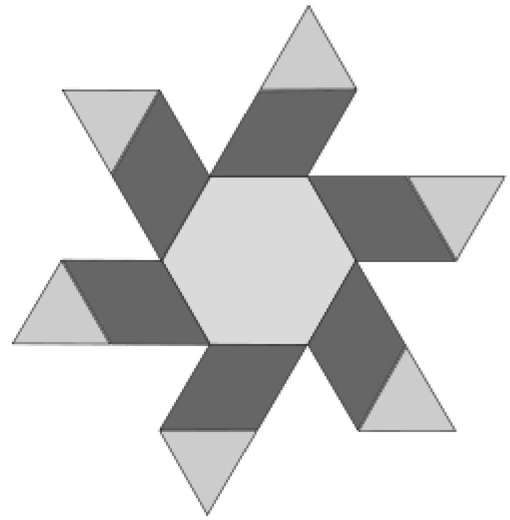
Erros comuns

errado	certo
$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{a}{b+c}$	$\frac{ac+ab}{bc}$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$	$\frac{ad+bc}{bd}$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ac}{ad+bc}$	$\frac{ad+bc}{bd}$
$\frac{a+k}{b+k}=\frac{a}{b}$	Não pode simplificar k
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$	$\frac{a+b}{ab}$

8).- Exercícios e problemas

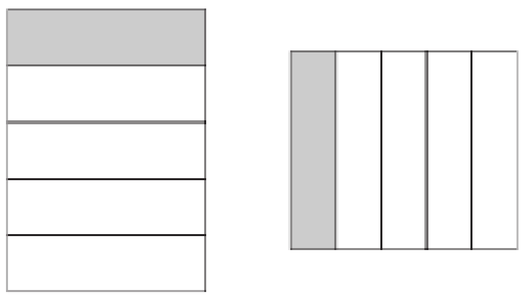
Exercícios didáticos

Ideia de partes iguais, ou alíquotas



Exercício -
Relativamente à figura ao lado:
a).- que fração do número total de formas simples da figura corresponde aos triângulos?
b).- que fração da área da figura foi feita com triângulos?

Exercício -
O jardim de Pedro está representado na figura abaixo.
Como podemos ver, ele é composto de duas partes, cada uma das quais foi dividida em cinco canteiros iguais, sendo que ele plantou as rosas nos canteiros sombreados da figura. Pergunta-se que fração da área total do jardim de Pedro foi destinada às rosas?



A variedade de significados da ideia de fração

Provavelmente, a principal razão da dificuldade do assunto frações é que a ideia de fração tem vários significados. Iniciamos recordando alguns deles:

- *parte de um todo*: se uma grandeza for dividida em b partes iguais (alíquotas), então a/b denota a destas b alíquotas;
- *medida*: quando uma grandeza de medida a foi dividida em b alíquotas, cada uma destas mede a/b ;
- *quociente:* resultado da divisão do número inteiro a pelo inteiro b ;
- *operador*: uma instrução que determina um processo, como "tomar 2/3 de ..." ;
- *razão* de a para b .

Exercício - (fração parte-todo grandeza discreta)
Maria têm seis lápis coloridos e quatro pretos. Que fração de pretos há entre os lápis?

Exercício - (fração parte-todo grandeza contínua)
Maria quebrou sua barra de chocolate em cinco partes iguais e comeu três delas. Que fração da barra foi comida?

Exercício - (fração como "medida" de grandeza discreta: contagem)
José foi jogar gude com os amigos e voltou com 5 bolinhas pretas e 8 coloridas. Que fração de suas bolinhas são coloridas?

Exercício - (fração como medida de grandeza contínua)
O farmacêutico de José lhe fez uma mistura com uma colher de remédio amargo e quatro colheres de groselha. Que fração da mistura foi feita com groselha?

Exercício -
Eu tinha duas barras de chocolate iguais, e dividi cada uma delas em cinco pedaços iguais. Comi uma parte de cada barra. Pergunta-se:
a).- o total que comi é que fração de barra?
b).- o total que comi é que fração do chocolate que eu tinha?

Exercício – (fração como quociente de grandeza discreta)
Tenho 12 adesivos e vou dividí-los em partes iguais, entre quatro crianças. Que fração representa essa partilha?

Exercício – (fração como quociente de grandeza contínua)
Se eu dividir igualmente duas barras de chocolate entre três crianças que fração do chocolate dado recebe cada criança?

Exercício - (fração operador em grandeza discreta)
José tem 24 adesivos e sua prima tem apenas 2/3 do que ele tem. Quantos adesivos tem sua prima?

Exercício - (fração operador em grandeza contínua)
José comeu ¾ de sua barra de chocolate. Desenhe o chocolate e represente o que ele comeu.

As ideias de equivalência e irredutibilidade, soma e multiplicação de frações

Exercício -
Trabalhando apenas com frações ordinárias, decidir qual dentre os seguintes aquecedores gasta mais gás: o primeiro gasta 710 litros em 7 ½ horas e o segundo gasta 640 litros em 5 ½ horas. Dica: inicie expressando os consumos horários como frações ordinárias e as transformando em frações irredutíveis, para melhor compará-las. Resp.: o segundo aquecedor consome mais.

Exercício -
Um comerciante vendeu 63 m de tecido, o que lhe deixou com 2/5 do que tinha. Quanto tinha? Resp.: 105 m.

Exercício -
Uma florista sempre faz suas encomendas do seguinte modo: 2/5 são plantas verdes, 3/7 são plantas de flores e o restante é de cactos. Pergunta-se:
a).- os cactos representam que fração do pedido?
b).- se entre as plantas de flores, 2/3 são rosas, que fração da encomenda representam as rosas?

Exercício -
No Dia dos Namorados, um florista vendeu ¾ dos seus bouquets de flores durante a manhã e de tarde vendeu 2/3 do que sobrara. No final do dia, que fração de seus bouquets foi vendida?

Exercício -
Um avião de 240 lugares partiu de PoA para Miami com 2/3 dos lugares ocupados, fez uma única escala, no Rio de Janeiro, onde novos passageiros ocuparam 3/5 dos lugares vazios. Com quantos lugares vazios o avião chegou em Miami?

Exercício – (ORM/2011)
Alexandre emprestou seu carro com tanque cheio para Gabriela e ela devolveu o carro sem abastecer. No tanque cabem 40 litros de gasolina.
a).- Se Gabriela gastou 2/5 da capacidade do tanque, com quantos litros no tanque ele devolveu o carro?
b).- Sem reabastecer o carro, Alexandre consumiu mais 1/3 da gasolina que sobrou para ir à escola e mais 1/5 do restante para voltar para casa. Quantos litros de gasolina serão necessários para ele voltar a deixar o tanque cheio?
Resp.:
a) 30 litros b) 34 litros.

Problemas olímpicos: adição de muitas frações, ou de frações complicadas

Tipicamente, este tipo de problemas pode ser resolvido se conseguirmos cancelar frações. Para se conseguir isso, pode-se usar identidades tais como:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \quad e \quad \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \quad ou \quad \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}\ .$$

Exercício -
Expressar como fração ordinária o valor de A, dado por:

$$A = \frac{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$$

Resp.: simplifique o numerador e depois o denominador; resp.: A = 31/9.

Exercício -
Expressar a fração seguinte como fração irredutível: $\dfrac{(20092008)^2}{(20092007)^2+(20092009)^2-2}$.

Resp.:
usando uma das dicas acima, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, podemos simplificar o denominador para $20092008\times 20092006+20092010\times 20092008$, o que permite um grande cancelamento com o numerador, obtendo-se facilmente o valor ½ para a fração dada.

Exercício -
Expressar a soma abaixo como uma fração irredutível:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}+\frac{1}{195}+\frac{1}{255}+\frac{1}{323}+\frac{1}{399}+\frac{1}{483}.$$

Resp.:
inicie observando que os denominadores podem ser facilmente escritos como produtos: $3=1\times 3,\ 15=3\times 5,\ 35=5\times 7,\ 63=7\times 9,$ etc.; a seguir, use a terceira dica acima para transformar a soma das frações dadas em uma soma na qual existe uma série de cancelamentos subtrativos, resultando no valor total da soma: ½ (1/1 – 1/23) = 11/23.

Problemas olímpicos diversos

Problema -
José gosta de apresentar o seguinte enigma para seus amigos: "O terço de um quarto é igual ao quarto de um quarto mais o terço do quarto de um quarto?" . Responda-lhe.

Problema - (ORM/2007)
Maria escreveu cinco números inteiros positivos e constatou que a soma deles era igual ao seu produto. Que números Maria escreveu?
Resp.:
$a+b+c+d+e=abcde$, onde $0<a\leq b\leq c\leq d\leq e$. Dividindo os dois lados da igualdade anterior, por $abcde$ obtemos:

$$\frac{1}{bcde}+\frac{1}{acde}+\frac{1}{abde}+\frac{1}{abce}+\frac{1}{abcd}=1 \ .$$

Ora, o menor resultado possível para o produto de quatro dos números de Maria é $abcd$, de modo que cada uma das frações acima é $\leqslant 1/abcd$, logo a igualdade acima mostra que $1\leqslant 5/abcd$, e então: $abcd\leqslant 5$. Disso segue que $a=b=1$ e $c=1$ ou $c=2$. Jogando com essa informação e a condição $a+b+c+d+e=abcde$, obtemos três soluções: {1,1,1,2,5}, {1,1,1,3,3} e {1,1,2,2,2}.

Problema -
É fácil achar três ou quatro números inteiros distintos cujos recíprocos têm soma igual a um, por exemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=1 \ .$$

Pede-se:
a).- mostrar que também existem cinco inteiros distintos cujos recíprocos têm soma unitária;
b).- usando indução matemática, mostre que esse tipo de resultado vale para $n\geqslant 3$ *inteiros;*

Resp.:
Observe que vale $\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$ e então generalize (provando). Para b) use que $\frac{m+1}{m}$ nunca é inteiro, se $m\geqslant 2$.

Problema - (ORM/2010)
Dos 165 participantes do Chat-ORM, 3/5 são alunos da Escola MAT e 1/3 destes alunos são meninos. Pergunta-se:
a).- Quantas meninas da Escola MAT participam do Chat-ORM?
b).- O número dos participantes do Chat-ORM que têm 16 anos é múltiplo de 4 e 7, além de ser divisível por seus próprios dígitos. Quantos são os alunos com 16 anos?
Resp.:
a).- Temos $3/5\times 165=99$ alunos da Escola MAT participando do Chat, e 2/3 deles são meninas, ou seja: 66 deles são meninas.
b).- O número de tais participantes tem de ser múltiplo de 28 e menor do que 165. Temos as seguintes possibilidades: 28, 56, 84, 112, 140. Desses números, o único que é divisível por todos seus dígitos é 112. Este é, pois, o número de alunos de 16 anos no Chat.

Problema – (ORM/2010)
Temos quatro inteiros positivos, a,b,c,d *tais que* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$ *. Mostre que ao menos um deles tem de ser par.*
Resp.: some as frações e raciocine por absurdo (suponha que todos sejam ímpares).

Problema -
Achar um número inteiro que somado ao numerador e o denominador de 13/25 produza uma nova fração que difere de 3/50 da unidade.
Resp.: 175.

Problema -
Mostrar que a fração que precisamos somar à uma fração irredutível, para obter a unidade, é também irredutível.
Resp.:
indicando por a/b a fração irredutível dada, precisamos mostrar que na fração $\frac{b-a}{b}$ o numerador e denominador são relativamente primos. O que envolve raciocínio conhecido.

Problema -
Mostrar que se escrevermos a soma de um inteiro com uma fração irrdedutível como uma fração, esta é irredutível.
Dica: raciocine por absurdo.

Problema -
Seja dada uma fração irredutível cujo numerador é maior do que o denominador, e suponhamos que a coloquemos na forma m+a/b, onde m é inteiro. Mostre que também a/b é irredutível.
Dica: raciocine por absurdo.

Problema -
Se somarmos 88 ao numerador da fração 8/13, que inteiro devemos somar a seu denominador para que a fração não mude de valor?
Dica: 88 é múltiplo do numerador. Faça algo semelhante com o denominador.

Problema -
A fração 1001/1848 é equivalente a alguma fração de denominador igual a 560?
Dica: cuidado com seu raciocínio. V. precisa examinar tanto denominador como numerador, e a maneira inteligente de fazer isso consiste em reduzir a fração dada à forma irredutível.

Problema -
Entre as frações equivalentes a 8/51, determinar a menor que tenha como diferença entre o deno minador e numerador um múltiplo de 6.
Dica: raciocine com mod 6. Resp.: 48/306.

Problema -
Mostrar que se a/b é irredutível, então também é irredutível a fração $\frac{a+b}{ab}$.

Problema -
Mostrar que se a/b é irredutível, então também é irredutível a fração a/b + b/a.

Problema -
Mostrar que ao somarmos duas frações irredutíveis, a única maneira da soma resultar num número inteiro é quando os denominadores forem iguais.
Dica: usar Lema de Euclides.

Problema - (dificil)
Achar um número inteiro que somado tanto ao numerador como ao denominador de a/b produza uma nova fração que difere de 1/n da unidade (onde n é um inteiro positivo dado).
Dica:
terá de estudar o que ocorre com $k=n(b-a)-b$, segundo $a<b, a=b, a>b$.